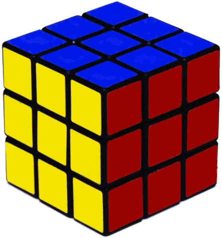
Les mathématiques du cube de Rubik

Matilde N. Lalín

Université de Montréal
mlalin@dms.umontreal.ca
http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin

Le 6 avril 2011

Le cube de Rubik



- Casse-tête inventé en 1974 par le hongrois Ernö Rubik.
- Composé de 26 pièces: les centres des 6 faces qui restent fixés, 8 pièces coins (avec 3 coleurs) et 12 pièces arêtes (avec 2 coleurs).
- Composé de 54 petits carrés (les faces extérieures des pièces).
- Le but: après avoir mélangé les faces, manipuler le cube pour tenter de lui rendre son apparence d'origine.

Les mouvements fondamentaux

On décrit les rotations de faces du cube de la faiçon suivante:

- $D =$ rotation d'un quart de tour dans les sens direct de la face droite.
- $H =$ rotation d'un quart de tour dans les sens direct de la face haut.
- $G =$ ... face gauche.
- $A =$ ... face avant.
- $P =$ ... face postérieure.
- $B =$ ... face basse.

La combinaison de mouvements

Soient X et Y deux mouvements.

- $XY =$ «faire X, puis faire Y ». (ex: $X^2 = XX$ «faire X deux fois consecutives »).
- $1 =$ «ne rien faire ».
- Deux mouvements sont égals s'ils ont le même effet sur le cube. (ex: $H^4 = 1$).

Groupes

Un groupe est un ensemble G avec une opération $*$

$$G \times G \longrightarrow G$$

telle que

- Associativité:
$$(a * b) * c = a * (b * c).$$
- Identité: $\exists e \in G$ tel que $\forall a \in G$,
$$e * a = a * e = a.$$
- Inverse: $\forall a \in G$, $\exists a^{-1} \in G$ tel que
$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$$

Un groupe G est dit abélien si

$$a * b = b * a \quad \forall a, b \in G.$$

(On dit que a et b commutent.)

Exemples de groupes

- $\mathbb{Z}$, avec la somme (la identité est 0 et l'inverse de x est $-x$).
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, avec la multiplication.
- Matrices carrées non-singulières avec la multiplication.
- $\mathcal{R}$, les mouvements du cube de Rubik.

Propriétés de $\mathcal{R}$ - Inverses

Soit $X \in \mathcal{R}$. X^{-1} est le mouvement qui défait X. On a

$$(X_1 X_2 \dots X_n)^{-1} = X_n^{-1} \dots X_2^{-1} X_1^{-1}.$$

« L'inverse de vous mettre vos chaussettes et ensuite vous mettre vos chaussures est enlever vos chaussures et enlever vos chaussettes. »

Propriétés de $\mathcal{R}$ - Non commutativité

$\mathcal{R}$ n'est pas abélien.

$$AH \neq HA.$$

Cependant, on a des mouvements qui commutent comme $HB = BH$.
Si X et Y affectent des pièces differentes, ils commutent.
«Se mettre sa chaussure gauche commute avec se mettre sa chaussure droite.»

Sous-groupes

G groupe. $H \subset G$ est un sous-groupe ssi H est encore un groupe avec l'opération de G.

- $a, b \in H \Rightarrow a * b \in H$,
- $e \in H$,
- $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$.

$\mathcal{R}$ a plusieurs sous-groupes, par exemple

$$H_A = \{A, A^2, A^3, A^4 = 1\}.$$

H_A est engendré par A.

ordre d'un groupe (sous-groupe) = nombre des éléments.

L'ordre maximum d'un élément sur $\mathcal{R}$ est

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1260.$$

Exemple:

$$DH^2B^{-1}PB^{-1}.$$

Quelques sous-groupes de $\mathcal{R}$

Générateurs	Ordre
D^2	2
D	$4 = 2^2$
D^2, G^2	$4 = 2^2$
D^2, G	$8 = 2^3$
D, G	$16 = 2^4$
D^2, H^2	$12 = 2^2 \cdot 3$
D^2, H	$14400 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
D, H	$73483200 = 2^6 \cdot 3^8 \cdot 5^2 \cdot 7$
D^2, G^2, H^2	$96 = 2^5 \cdot 3$
D, G, H	$159993501696000 = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^3 \cdot 7^2$
D^2, A^2, H^2	$2592 = 2^5 \cdot 3^4$
D, A, H	$170659735142400 = 2^{18} \cdot 3^{12} \cdot 5^2 \cdot 7^2$

Quelques sous-groupes de $\mathcal{R}$

Générateurs	Ordre
D^2, G^2, H^2, B^2	$192 = 2^6 \cdot 3$
D^2, G^2, H^2, A^2	$165888 = 2^{11} \cdot 3^4$
D^2, G^2, A^2, P^2, H^2	$663552 = 2^{13} \cdot 3^4$
D^2, G^2, A^2, P^2, H	$19508428800 = 2^{16} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2$
D^2, G^2, A, P, H	$2111914222387200 = 2^{16} \cdot 3^{14} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11$
D, G, A, P, H	$43252003274489856000 = 2^{27} \cdot 3^{14} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11$
$AP^{-1}, DG^{-1}, HB^{-1}$	$768 = 2^8 \cdot 3$
AP, DG, HB	$6144 = 2^{11} \cdot 3$

Noter que

$$B = D^2G^2H^2D^2P^2D^2G^2A^2G^2H^{-1}D^2G^2H^2D^2P^2D^2G^2A^2G^2H^2,$$

$$B^2 = D^2A^2P^2G^2H^2D^2A^2P^2G^2.$$

Théorème

Le groupe $\mathcal{R}$ contient tous les sous-groupes d'ordre < 13, et tous les sous-groupes non-abéliens d'ordre < 26.

Superflip

Voice le superflip, qui tourne chaque pièce arête sur soi-même.

$$S = HD^2APDP^2DH^2GP^2DH^{-1}B^{-1}D^2AD^{-1}GP^2H^2A^2.$$

Centralisateur de $\mathcal{R}$

Le centralisateur $\mathcal{Z}(G)$ d'un groupe G est donné par

$$\mathcal{Z}(G) = \{f \in G \,|\, fg = gf \quad \forall g \in G\},$$

l'ensemble d'éléments qui commutent avec tous les éléments du groupe. $\mathcal{Z}(G)$ est un sous-groupe de G.

$$\mathcal{Z}(\mathcal{R}) = \{1, S\},$$

un sous-groupe d'ordre 2.

Permutations

On considére $\{1, 2, \ldots, n\}$. On étudie les permutations. Notation des cycles:

$$(12)(345)$$

On fait $1 \leftrightarrow 2$, et $3 \to 4$, $4 \to 5$, et $5 \to 3$.
La multiplication

$$(612)(34) * (124)(35) = (16)(2354)$$

donne un groupe.
Le groupe de permutations du ensemble X est noté comme $\mathbb{S}_X$ (groupe symétrique).

ordre = le plus petit entier positif k tel que si on répète la permutation k fois, tout reste invariant.

$$(123) \quad \text{a ordre } 3.$$

transpositions = cycles d'ordre 2 comme (12)

Parité des permutations

Une permutation est paire (impaire) si se décompose en un nombre pair (impair) de transpositions:

$$\text{impaires} \quad (12), (1234) = (14)(13)(12)$$

$$\text{paires} \quad (123) = (13)(12)$$

Les permutations paires forment un sous-groupe noté $\mathbb{A}_X$ (groupe alterné).
$\mathbb{A}_X$ est engendré par les 3-cycles.

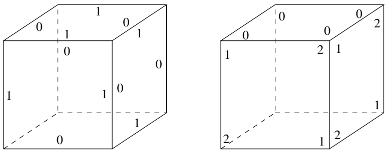
Les permutations du cube de Rubik

Les ensembles des pièces arêtes et des pièces coins

$$\Pi_A = \{a_1, \ldots, a_{12}\}, \qquad \Pi_C = \{c_1, \ldots, c_8\}.$$

Orientations des pièces arêtes et orientations des pièces coins

$$\{0,1\}, \qquad \{0,1,2\}.$$



Alors, on peut décrire les positions du cube comme

$$(\sigma, \tau, x, y) \quad \sigma \in \mathbb{S}_{\Pi_A}, \tau \in \mathbb{S}_{\Pi_C}, x \in \{0,1\}^{12}, y \in \{0,1,2\}^{8}.$$

Théorème

(σ, τ, x, y) est possible si et seulement si

- *σ et τ sont le deux paires ou les deux impaires.*
- *2 divise $x_1 + \cdots + x_{12}$.*
- *3 divise $y_1 + \cdots + y_8$.*

« Chaque mouvement fondamental est un 4-cycle sur les pièces arêtes et un 4-cycle sur les pièces coins. »

$$\mathcal{R} \simeq (\mathbb{S}_{12} \times \mathbb{S}_8) \cap \mathbb{A}_{20} \ltimes ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{12} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^8).$$

L'ordre de $\mathcal{R}$

Théorème

Il y a

$$\frac{1}{2}12! \cdot 8! \cdot 2^{11} \cdot 3^{7} = 43252003274489856000 \sim 4.3 \times 10^{9}$$

combinaisons.

Un mouvement par seconde $\rightsquigarrow$ 1.37×10^{12} ans pour faire toutes les permutations.

(100 fois l'âge de l'univers.)

Corollaire

Si on démonte le cube de Rubik et on le remonte au hasard, on a une chance sur douze de pouvoir le résoudre.

Supergroupe

Si les faces centrales ont des dessins non-symétriques on obtient le supergroupe d'ordre

$$2^{11}|\mathcal{R}| = 88580102706155225088000 \sim 8.9 \times 10^{22}.$$

Stabilisateurs

X ensemble

$$\mathrm{Stab}(X) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

- $$|\mathrm{Stab}(U)| = 8! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2^7 \cdot 3^3 = 1672151040.$$
- $$|\mathrm{Stab}(\Pi_A \ltimes X)| = \frac{8!}{2} \cdot 3^7 = 44089920.$$
- $$|\mathrm{Stab}(\Pi_C \ltimes Y)| = \frac{12!}{2} \cdot 2^{11} = 490497638400.$$

Commutateurs

a $b \in G$, alors

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$$

commutateur de a et b.

$$[a, b] = 1 \iff ab = ba$$

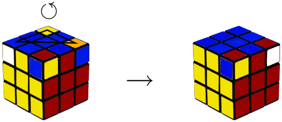
$\mathcal{K}(G)$ (sous-groupe commutateur) est le sous-groupe engendré par les $[a, b]$.
On a que

$$\mathcal{K}(\mathcal{R}) = \{(\sigma, \tau, x, y) \in \mathcal{R} \mid \sigma, \tau \text{ paires}\}.$$

$X, Y \in \mathcal{R}$, alors $[X, Y]$ affecte seulement les pièces qui sont affectés par X et Y à la fois.
Exemple:

$$[HDH^{-1}, G^{-1}] = HDH^{-1}G^{-1}HD^{-1}H^{-1}G$$

fait



Propriété

S'il y a un seul pièce qui est permutée par X et Y à la fois, alors $[X, Y]$ donne un 3-cycle, $[X, Y]^3 = 1$.

Nombre de mouvements pour résoudre le cube

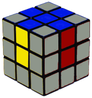
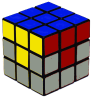
- Les algorithmes de résolution populaires: 60-70 mouvements
- Reid (1995): Superflit a besoin de au moins 20 mouvements.
- Davidson, Dethridge, Kociemba et Rokicki (juillet 2010): il suffit avec 20 mouvements «nombre de Dieu ».

Colloque de mathématiques de Montréal CRM - ISM
Le 15 avril 2011. 16:00
Morley Davidson
Rubik's Cube in Twenty Moves or Less

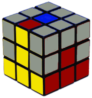
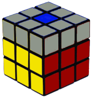
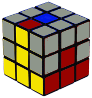
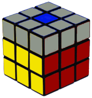
Les méthodes de résolution - Méthode couche par couche

- Completer une face, par exemple la face basse, en placeant correctement la couronne et les pièces centrales.
- Completer la deuxième couche.
- Placer les pièces arêtes de la face supérieure à leur place et les orienter correctement.
- Placer les pièces coins à leur place et les orienter correctement.

Les méthodes de résolution - Méthode couche par couche

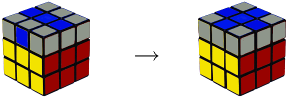
- Completer une face, par exemple la face basse, en placeant correctement la couronne et les pièces centrales.
    - Faire premièrement une croix. 
    - Completer les coins. 
- Completer la deuxième couche.
- Placer les pièces arêtes de la face supérieure à leur place et les orienter correctement.
- Placer les pièces coins à leur place et les orienter correctement.

Les méthodes de résolution - Méthode couche par couche

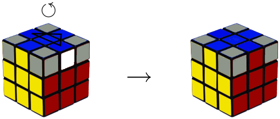
- Completer une face, par exemple la face basse, en placeant correctement la couronne et les pièces centrales.
- Completer la deuxième couche.
  - $HDH^{-1}D^{-1}AD^{-1}F^{-1}D$  $\longrightarrow$ 
  - $H^{-1}A^{-1}HAHDH^{-1}D^{-1}$  $\longrightarrow$ 
- Placer les pièces arêtes de la face supérieure à leur place et les orienter correctement.
- Placer les pièces coins à leur place et les orienter correctement.

Les méthodes de résolution - Méthode couche par couche

- Completer une face, par exemple la face basse, en placeant correctement la couronne et les pièces centrales.
- Completer la deuxième couche.
- Placer les pièces arêtes de la face supérieure à leur place et les orienter correctement.
  - $PGHG^{-1}H^{-1}P^{-1}$



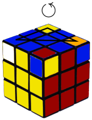
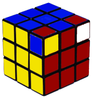
  - $DHD^{-1}HDH^2D^{-1}$

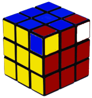
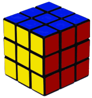


- Placer les pièces coins à leur place et les orienter correctement.

Les méthodes de résolution - Méthode couche par couche

- Completer une face, par exemple la face basse, en placeant correctement la couronne et les pièces centrales.
- Completer la deuxième couche.
- Placer les pièces arêtes de la face supérieure à leur place et les orienter correctement.
- Placer les pièces coins à leur place et les orienter correctement.

- $HDH^{-1}G^{-1}HD^{-1}H^{-1}G$  $\longrightarrow$ 
- $D^{-1}BDABA^{-1}HAB^{-1}A^{-1}D^{-1}B^{-1}DH^{-1}$

 $\longrightarrow$ 

Les méthodes de résolution - Des autres méthodes

- Méthode Corners first: d'abord on place les coins.
- Méthode d'Ofapel: on complète des faces opposées.
- Méthode de Lars Petrus: on commence avec un petit cube de 2x2x2.
- Méthode de Jessica Fridrich: peu intuitif, utilisé en speedcubing.
- Méthodes de Thistlethwaite, Kociemba, Korf qui se fondent sur des sous-groupes (théoriques).
- Méthode du tournevis.

Marco Leonardo (1,9041 ans)

Le cube de Rubik est
un jeu d'enfants!