Variaciones del grupo base de la Medida de Mahler

Oliver T. Dasbach, Matilde N. Lalín*

*UBC-PIMS, MPIM, U of A
mlalin@math.ubc.ca
http://www.math.ubc.ca/~mlalin
Segundas Jornadas de Teoría de Números

Julio 17, 2007

Medida de Mahler de polinomios multivariados

$P \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, la *medida de Mahler* (logarítmica) es :

$$\begin{aligned} m(P) &= \int_0^1 \dots \int_0^1 \log |P(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\theta_1}, \dots, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\theta_n})| \mathrm{d}\theta_1 \dots \mathrm{d}\theta_n \\ &= \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^n} \int_{\mathbb{T}^n} \log |P(x_1, \dots, x_n)| \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} \dots \frac{\mathrm{d}x_n}{x_n}. \end{aligned}$$

Por la fórmula de Jensen,

$$m\left(a \prod (x - \alpha_i)\right) = \log |a| + \sum \log \max\{1, |\alpha_i|\}.$$

Medida de Mahler de polinomios multivariados

$P \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$, la *medida de Mahler* (logarítmica) es :

$$\begin{aligned} m(P) &= \int_0^1 \ldots \int_0^1 \log |P(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\theta_1}, \ldots, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\theta_n})| \mathrm{d}\theta_1 \ldots \mathrm{d}\theta_n \\ &= \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^n} \int_{\mathbb{T}^n} \log |P(x_1, \ldots, x_n)| \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} \ldots \frac{\mathrm{d}x_n}{x_n}. \end{aligned}$$

Por la fórmula de Jensen,

$$m\left(a \prod (x - \alpha_i)\right) = \log |a| + \sum \log \max\{1, |\alpha_i|\}.$$

Ejemplos en varias variables

- Smyth (1981)

$$m(1+x+y) = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\mathrm{L}(\chi_{-3},2) = \mathrm{L}'(\chi_{-3},-1)$$

$$m(1+x+y+z) = \frac{7}{2\pi^2}\zeta(3)$$

- Boyd, Deninger, Rodríguez-Villegas (1997)

$$m\left(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}-1\right) \stackrel{?}{=} \mathrm{L}'(E_1,0)$$

E_1 curva elíptica, clausura proyectiva de $x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}-1=0$.

Ejemplos en varias variables

- Smyth (1981)

$$m(1+x+y) = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\mathrm{L}(\chi_{-3},2) = \mathrm{L}'(\chi_{-3},-1)$$

$$m(1+x+y+z) = \frac{7}{2\pi^2}\zeta(3)$$

- Boyd, Deninger, Rodríguez-Villegas (1997)

$$m\left(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}-1\right) \stackrel{?}{=} \mathrm{L}'(E_1,0)$$

E_1 curva elíptica, clausura proyectiva de $x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}-1=0$.

La técnica general

Rodríguez-Villegas (1997)

$$P_\lambda(x,y) = 1 - \lambda P(x,y) \qquad P(x,y) = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$$

$$m(P,\lambda) := m(P_\lambda)$$

$$m(P,\lambda) = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \int_{\mathbb{T}^2} \log|1 - \lambda P(x,y)| \frac{\mathrm{d}x}{x} \frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

La técnica general

Rodríguez-Villegas (1997)

$$P_\lambda(x,y) = 1 - \lambda P(x,y) \qquad P(x,y) = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$$

$$m(P,\lambda) := m(P_\lambda)$$

$$m(P,\lambda) = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \int_{\mathbb{T}^2} \log|1 - \lambda P(x,y)| \frac{\mathrm{d}x}{x}\frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

Notar

$$|\lambda P(x,y)| < 1, \qquad \lambda \quad \text{chico}, \quad x, y \in \mathbb{T}^2$$

$$\tilde{m}(P,\lambda) = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \int_{\mathbb{T}^2} \log(1-\lambda P(x,y)) \frac{\mathrm{d}x}{x}\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \int_{\mathbb{T}^2} P(x,y)^n \frac{\mathrm{d}x}{x}\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \lambda^n}{n}$$

donde

$$\frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \int_{\mathbb{T}^2} P(x,y)^n \frac{\mathrm{d}x}{x}\frac{\mathrm{d}y}{y} = [P(x,y)^n]_0 = a_n$$

Notar

$$|\lambda P(x,y)| < 1, \qquad \lambda \quad \text{chico}, \quad x, y \in \mathbb{T}^2$$

$$\tilde{m}(P,\lambda) = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \int_{\mathbb{T}^2} \log(1 - \lambda P(x,y)) \frac{\mathrm{d}x}{x} \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \int_{\mathbb{T}^2} P(x,y)^n \frac{\mathrm{d}x}{x} \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \lambda^n}{n}$$

donde

$$\frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \int_{\mathbb{T}^2} P(x,y)^n \frac{\mathrm{d}x}{x} \frac{\mathrm{d}y}{y} = [P(x,y)^n]_0 = a_n$$

Notar

$$|\lambda P(x,y)| < 1, \qquad \lambda \quad \text{chico}, \quad x, y \in \mathbb{T}^2$$

$$\tilde{m}(P,\lambda) = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \int_{\mathbb{T}^2} \log(1 - \lambda P(x,y)) \frac{\mathrm{d}x}{x} \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \int_{\mathbb{T}^2} P(x,y)^n \frac{\mathrm{d}x}{x} \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \lambda^n}{n}$$

donde

$$\frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \int_{\mathbb{T}^2} P(x,y)^n \frac{\mathrm{d}x}{x} \frac{\mathrm{d}y}{y} = [P(x,y)^n]_0 = a_n$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{m}(P,\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2}\int_{\mathbb{T}^2} \frac{P(x,y)}{1-\lambda P(x,y)}\frac{\mathrm{d}x}{x}\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

Escribimos

$$u(P,\lambda) = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2}\int_{\mathbb{T}^2} \frac{1}{1-\lambda P(x,y)}\frac{\mathrm{d}x}{x}\frac{\mathrm{d}y}{y} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$$

$$\tilde{m}(P,\lambda) = -\int_0^{\lambda} (u(P,t)-1)\frac{\mathrm{d}t}{t} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\lambda^n}{n}$$

En el caso $P = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$,

$$a_n = 0 \qquad n \quad \text{impar}$$

$$a_{2m} = \binom{2m}{m}^2$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{m}(P,\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2}\int_{\mathbb{T}^2}\frac{P(x,y)}{1-\lambda P(x,y)}\frac{\mathrm{d}x}{x}\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

Escribimos

$$u(P,\lambda) = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2}\int_{\mathbb{T}^2}\frac{1}{1-\lambda P(x,y)}\frac{\mathrm{d}x}{x}\frac{\mathrm{d}y}{y} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n$$

$$\tilde{m}(P,\lambda) = -\int_0^{\lambda}(u(P,t)-1)\frac{\mathrm{d}t}{t} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\lambda^n}{n}$$

En el caso $P = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$,

$$a_n = 0 \qquad n \quad \text{impar}$$

$$a_{2m} = \binom{2m}{m}^2$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{m}(P,\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2}\int_{\mathbb{T}^2}\frac{P(x,y)}{1-\lambda P(x,y)}\frac{\mathrm{d}x}{x}\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

Escribimos

$$u(P,\lambda) = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2}\int_{\mathbb{T}^2}\frac{1}{1-\lambda P(x,y)}\frac{\mathrm{d}x}{x}\frac{\mathrm{d}y}{y} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n$$

$$\tilde{m}(P,\lambda) = -\int_0^{\lambda}(u(P,t)-1)\frac{\mathrm{d}t}{t} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\lambda^n}{n}$$

En el caso $P = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$,

$$a_n = 0 \qquad n \quad \text{impar}$$

$$a_{2m} = \binom{2m}{m}^2$$

Definición

$\mathbb{F}_{x_1,\dots,x_l}$ *grupo libre en* $x_1, \dots, x_l$,

$N \triangleleft \mathbb{F}_{x_1,\dots,x_l}$, $\Gamma = \mathbb{F}_{x_1,\dots,x_l}/N$

$$Q = Q(x_1, \dots, x_l) = \sum_{g\in\Gamma} c_g g \in \mathbb{C}\Gamma,$$

$$Q^* = \sum_{g\in\Gamma} \overline{c_g} g^{-1} \in \mathbb{C}\Gamma \textit{ recíproco.}$$

$P = P(x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{C}\Gamma$, $P = P^*$, $|\lambda| <$ *longitud de* P,

$$m_\Gamma(P, \lambda) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \lambda^n}{n},$$

$$a_n = [P(x_1, \dots, x_l)^n]_0 .$$

Definición

$\mathbb{F}_{x_1,\dots,x_l}$ *grupo libre en* $x_1, \dots, x_l$,

$N \lhd \mathbb{F}_{x_1,\dots,x_l}$, $\Gamma = \mathbb{F}_{x_1,\dots,x_l}/N$

$$Q = Q(x_1, \dots, x_l) = \sum_{g \in \Gamma} c_g g \in \mathbb{C}\Gamma,$$

$$Q^* = \sum_{g \in \Gamma} \overline{c_g} g^{-1} \in \mathbb{C}\Gamma \textit{ recíproco.}$$

$P = P(x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{C}\Gamma$, $P = P^*$, $|\lambda| <$ *longitud de* P,

$$m_\Gamma(P, \lambda) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \lambda^n}{n},$$

$$a_n = [P(x_1, \dots, x_l)^n]_0 \, .$$

También escribimos de esta forma

$$u_\Gamma(P,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$$

la función generatriz de a_n.

$Q(x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{C}\Gamma$

$$QQ^* = \frac{1}{\lambda}(1 - (1 - \lambda QQ^*))$$

donde λ es real, positivo y $1/\lambda$ es mayor que la longitud de QQ^*.

$$m_\Gamma(Q) = -\frac{\log \lambda}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2n}, \qquad b_n = \left[(1 - \lambda QQ^*)^n\right]_0 .$$

También escribimos de esta forma

$$u_\Gamma(P,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$$

la función generatriz de a_n.

$Q(x_1, \ldots, x_l) \in \mathbb{C}\Gamma$

$$QQ^* = \frac{1}{\lambda}(1 - (1 - \lambda QQ^*))$$

donde λ es real, positivo y $1/\lambda$ es mayor que la longitud de QQ^*.

$$m_\Gamma(Q) = -\frac{\log \lambda}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2n}, \qquad b_n = \left[(1 - \lambda QQ^*)^n\right]_0 .$$

Volumen de nudos hiperbólicos

K nudo: inmersión suave $S^1 \subset S^3$.

$$\Gamma = \pi_1(S^3 \setminus K) = \langle x_1, \ldots, x_l \mid r_1, \ldots, r_{l-1} \rangle$$

Para un grupo arbitrario Γ, sea

$$\epsilon : \mathbb{Z}\Gamma \to \mathbb{Z} \qquad \sum_g c_g g \to \sum_g c_g .$$

Derivación: mapping $\mathbb{Z}\Gamma \to \mathbb{Z}\Gamma$

- $D(u+v) = Du + Dv$.
- $D(u \cdot v) = D(u)\epsilon(v) + uD(v)$

Volumen de nudos hiperbólicos

K nudo: inmersión suave $S^1 \subset S^3$.

$$\Gamma = \pi_1(S^3 \setminus K) = \langle x_1, \dots, x_l \,|\, r_1, \dots, r_{l-1} \rangle$$

Para un grupo arbitrario Γ, sea

$$\epsilon : \mathbb{Z}\Gamma \to \mathbb{Z} \qquad \sum_g c_g g \to \sum_g c_g .$$

Derivación: mapping $\mathbb{Z}\Gamma \to \mathbb{Z}\Gamma$

- $D(u+v) = Du + Dv$.
- $D(u \cdot v) = D(u)\epsilon(v) + uD(v)$

Fox (1953): G libre, $\{x_1,\dots\}$ generadores, hay una derivación $\frac{\partial}{\partial x_i}$ tal que

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{i,j}.$$

De vuelta con los nudos,
Consideramos la matriz de Fox

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial r_1}{\partial x_l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial r_{g-1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial r_{l-1}}{\partial x_l} \end{pmatrix} \in M^{(l-1)\times l}(\mathbb{C}\Gamma)$$

Al borrar una columna, $F \rightsquigarrow A \in M^{(l-1)\times(l-1)}(\mathbb{C}\Gamma)$.

Teorema (Lück, 2002)

Sea K un nudo hiperbólico. Entonces, para λ suficientemente pequeño,

$$\frac{1}{3\pi}\mathrm{Vol}(S^3 \setminus K) = -(l-1)\ln\lambda - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathrm{tr}_{\mathbb{C}\Gamma}\left((1-\lambda AA^*)^n\right).$$

- El lado derecho es $2\mathrm{tr}(m_{\pi_1(S^3\setminus K)}(A))$.
- Si $A \in M^{l-1}\mathbb{C}[t,t^{-1}]$, el lado derecho es igual a $2m(\det(A))$.
- Γ discreto. Determinante de Fuglede-Kadison para operadores acotados invertibles Γ-equivariantes en $l^2(\Gamma)$.
  Lück: generalización a no invertibles.

Teorema (Lück, 2002)

Sea K un nudo hiperbólico. Entonces, para λ suficientemente pequeño,

$$\frac{1}{3\pi}\mathrm{Vol}(S^3 \setminus K) = -(l-1)\ln\lambda - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathrm{tr}_{\mathbb{C}\Gamma}\left((1-\lambda AA^*)^n\right).$$

- El lado derecho es $2\mathrm{tr}(m_{\pi_1(S^3\setminus K)}(A))$.
- Si $A \in M^{l-1}\mathbb{C}[t,t^{-1}]$, el lado derecho es igual a $2m(\det(A))$.
- Γ discreto. Determinante de Fuglede-Kadison para operadores acotados invertibles Γ-equivariantes en $l^2(\Gamma)$.
  Lück: generalización a no invertibles.

Teorema (Lück, 2002)

Sea K un nudo hiperbólico. Entonces, para λ suficientemente pequeño,

$$\frac{1}{3\pi}\mathrm{Vol}(S^3 \setminus K) = -(l-1)\ln\lambda - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathrm{tr}_{\mathbb{C}\Gamma}\left((1-\lambda AA^*)^n\right).$$

- El lado derecho es $2\mathrm{tr}(m_{\pi_1(S^3\setminus K)}(A))$.
- Si $A \in M^{l-1}\mathbb{C}[t,t^{-1}]$, el lado derecho es igual a $2m(\det(A))$.
- Γ discreto. Determinante de Fuglede-Kadison para operadores acotados invertibles Γ-equivariantes en $l^2(\Gamma)$.
  Lück: generalización a no invertibles.

Teorema (Lück, 2002)

Sea K un nudo hiperbólico. Entonces, para λ suficientemente pequeño,

$$\frac{1}{3\pi}\mathrm{Vol}(S^3 \setminus K) = -(l-1)\ln\lambda - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathrm{tr}_{\mathbb{C}\Gamma}\left((1-\lambda AA^*)^n\right).$$

- El lado derecho es $2\mathrm{tr}(m_{\pi_1(S^3\setminus K)}(A))$.
- Si $A \in M^{l-1}\mathbb{C}[t,t^{-1}]$, el lado derecho es igual a $2m(\det(A))$.
- Γ discreto. Determinante de Fuglede-Kadison para operadores acotados invertibles Γ-equivariantes en $l^2(\Gamma)$.
  Lück: generalización a no invertibles.

Medida de Mahler sobre grupos finitos

$$P = \sum_i (\delta_i S_i + \overline{\delta_i} S_i^{-1}) + \sum_j \eta_j T_j \in \mathbb{C}\Gamma$$

$S_i \neq S_i^{-1}$, $T_j = T_j^{-1}$, $\delta_i \in \mathbb{C}$, $\eta_j \in \mathbb{R}$, and $S_i, T_j \in \Gamma$,

Teorema

Para Γ finito

$$m_\Gamma(P, \lambda) = \frac{1}{|\Gamma|} \log \det(I - \lambda A),$$

donde A la matriz de adyacencia del grafo (pesado) de Cayley y $\frac{1}{\lambda} > \rho(A)$.

Produce una continuación analítica de $m_\Gamma(P, \lambda)$ a $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Spec}(A)$.

Medida de Mahler sobre grupos finitos

$$P = \sum_i (\delta_i S_i + \overline{\delta_i} S_i^{-1}) + \sum_j \eta_j T_j \in \mathbb{C}\Gamma$$

$S_i \neq S_i^{-1}$, $T_j = T_j^{-1}$, $\delta_i \in \mathbb{C}$, $\eta_j \in \mathbb{R}$, and $S_i, T_j \in \Gamma$,

Teorema

Para Γ finito

$$m_\Gamma(P, \lambda) = \frac{1}{|\Gamma|} \log \det(I - \lambda A),$$

donde A la matriz de adyacencia del grafo (pesado) de Cayley y $\frac{1}{\lambda} > \rho(A)$.

Produce una continuación analítica de $m_\Gamma(P, \lambda)$ a $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Spec}(A)$.

Grupos abelianos

Γ grupo abeliano finito

$$\Gamma = \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/m_l\mathbb{Z}$$

Corolario

$$m_\Gamma(P,\lambda) = \frac{1}{|\Gamma|} \log \left(\prod_{j_1,\dots,j_l} \left(1 - \lambda P(\xi_{m_1}^{j_1}, \dots, \xi_{m_l}^{j_l})\right) \right)$$

donde ξ_k es una raíz primitiva de la unidad.

Usa la descripción del espectro de grafos de Cayley para grupos finitos dada por Babai (1979).

Teorema

Para λ pequeño,

$$\lim_{m_1,\dots,m_l\to\infty} m_{\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z}\times\cdots\times\mathbb{Z}/m_l\mathbb{Z}}(P,\lambda) = m_{\mathbb{Z}^l}(P,\lambda).$$

Donde el límite se toma con $m_1,\dots,m_l$ yendo a infinito en forma independiente.

Grupos Dihedrales

$$\Gamma = D_m = \langle \rho, \sigma \,|\, \rho^m, \sigma^2, \sigma\rho\sigma\rho \rangle.$$

Teorema

Sea $P \in \mathbb{C}[D_m]$ recíproco. Entonces

$$[P^n]_0 = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^{m} \left(P^n\left(\xi_m^j, 1\right) + P^n\left(\xi_m^j, -1\right) \right),$$

donde P^n se expresa como suma de monomios ρ^k, $\sigma\rho^k$ antes de efectuar la evaluación.

Para $\Gamma = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle x, y \,|\, x^m, y^2, [x,y] \rangle$,

$$[P^n]_0 = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^{m} \left(P\left(\xi_m^j, 1\right)^n + P\left(\xi_m^j, -1\right)^n \right).$$

Comparamos D_m y $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ con $x = \rho$ y $y = \sigma$ en D_m.

Teorema

Sea

$$P = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k x^k + \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k y x^k$$

con coeficientes reales y recíproco en $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (por lo cual también es recíproco en D_m). Entonces,

$$m_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(P, \lambda) = m_{D_m}(P, \lambda).$$

Para $\Gamma = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle x, y \,|\, x^m, y^2, [x, y] \rangle$,

$$[P^n]_0 = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^{m} \left(P\left(\xi_m^j, 1\right)^n + P\left(\xi_m^j, -1\right)^n \right).$$

Comparamos D_m y $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ con $x = \rho$ y $y = \sigma$ en D_m.

Teorema

Sea

$$P = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k x^k + \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k y x^k$$

con coeficientes reales y recíproco en $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (por lo cual también es recíproco en D_m). Entonces,

$$m_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(P, \lambda) = m_{D_m}(P, \lambda).$$

Corolario

Sea $P \in \mathbb{R}[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$ *recíproco. Entonces*

$$m_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(P,\lambda) = m_{D_\infty}(P,\lambda),$$

donde $D_\infty = \langle \rho, \sigma \,|\, \sigma^2, \sigma\rho\sigma\rho \rangle$.

Aproximaciones de medidas de Mahler por cocientes

Γ_m son cocientes de Γ:

Teorema

Sea $P \in \Gamma$ recíproco.

- *Para* $\Gamma = D_\infty$, $\Gamma_m = D_m$,

$$\lim_{m\to\infty} m_{D_m}(P,\lambda) = m_{D_\infty}(P,\lambda).$$

- *Para* $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z}) = \langle x, y \,|\, x^2, y^3 \rangle$, $\Gamma_m = \langle x, y \,|\, x^2, y^3, (xy)^m \rangle$,

$$\lim_{m\to\infty} m_{\Gamma_m}(P,\lambda) = m_{PSL_2(\mathbb{Z})}(P,\lambda).$$

- *Para* $\Gamma = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle x, y \rangle$, $\Gamma_m = \langle x, y \,|\, [x,y]^m \rangle$,

$$\lim_{m\to\infty} m_{\Gamma_m}(P,\lambda) = m_{\mathbb{Z}*\mathbb{Z}}(P,\lambda).$$

Ejemplos infinitos

$P = x + x^{-1} + y + y^{-1}$.

$$u_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(P,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^2 \lambda^{2n} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 16\lambda^2\right)$$

$$u_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(P,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{4n}{2n} \lambda^{2n}$$

$$u_{\mathbb{Z}*\mathbb{Z}}(P,\lambda) = \frac{3}{1+2\sqrt{1-12\lambda^2}}$$

Futuros estudios: recurrencia de los coeficientes

- Caso abeliano:
  u y sus derivadas satisfacen una equación diferencial de Picard–Fuchs.
  Griffiths (1969)

$$A(\lambda)u'' + B(\lambda)u' + C(\lambda)u = 0,$$

- Caso libre:
  u es algebraica.
  Haiman (1993)

- Qué pasa "en el medio"? Hay siempre una recurrencia de coeficientes?

Futuros estudios: recurrencia de los coeficientes

- Caso abeliano:
  u y sus derivadas satisfacen una equación diferencial de Picard–Fuchs.
  Griffiths (1969)

$$A(\lambda)u'' + B(\lambda)u' + C(\lambda)u = 0,$$

- Caso libre:
  u es algebraica.
  Haiman (1993)

- Qué pasa "en el medio"? Hay siempre una recurrencia de coeficientes?

Futuros estudios: recurrencia de los coeficientes

- Caso abeliano:
  u y sus derivadas satisfacen una equación diferencial de Picard–Fuchs.
  Griffiths (1969)

$$A(\lambda)u'' + B(\lambda)u' + C(\lambda)u = 0,$$

- Caso libre:
  u es algebraica.
  Haiman (1993)

- Qué pasa "en el medio"? Hay siempre una recurrencia de coeficientes?

Futuros estudios: Entropía de árboles y la conjetura del Volumen

$m\left(P, \frac{1}{l^1(P)}\right)$ es escencialmente $h(G)$, la entropía de árbol del grafo de Cayley.

Lyons (2005)

G_n son grafos finitos que se aproximan a un grafo infinito transitivo G,

$$h(G) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \tau(G_n)}{|V(G_n)|},$$

donde $\tau(G)$ es la complejidad (número de árboles generadores).

Comparar con

Conjetura ((Conjetura del Volumen) Kashaev, H. Murakami, J. Murakami (1997))

Sea K un nudo hiperbólico, y $J_n(K,q)$ su polinomio de Jones colorido normalizado, entonces,

$$\frac{1}{2\pi}\mathrm{Vol}(S^3 \setminus K) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \left| J_n\left(K, \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{n}}\right)\right|}{n}$$

FIN