

Quelques paradoxes en probabilités

Prof. Florian Maire

École d'été 2023, DMS, Université de Montréal

1 Quelques mots d'introduction

- Probabilité = science qui étudie les phénomènes aléatoires, le hasard. Par contraste, statistique = science qui étudie les données dans le but d'identifier des associations entre variables, de modéliser/prédire, etc.
- Aléatoire ou incertitude, le hasard existe-t-il?
- Générer du hasard soi-même? pile/face, mélange d'un jeu de carte, lancer de dès, etc.
- L'expérience (et la machine) de Diaconis.
- Interprétations d'une probabilité : fréquentiste, subjectiviste.
- La théorie des probabilités (axiomes posés par Kolmogorov vers 1930), donne un cadre mathématique rigoureux à l'étude des phénomènes aléatoires.
- Ce dont on a besoin pour aujourd'hui : calculs avec la loi uniforme et le théorème de Bayes.

2 Quelques paradoxes

- La date de fête : on réunit un groupe de n personnes pigées au hasard et on considère l'événement

$$E_n = \{\text{au moins deux personnes ont le même jour de fête (jour/mois) dans ce groupe}\}.$$

On suppose que le jour de naissance est uniforme sur toute l'année (disons 365 jours) Quelle est la taille du groupe suffisante (le nombre n) pour qu'il y ait une probabilité d'au moins 1/2 que E_n se produise?

- Le jeu de Monty Hall : dans un jeu télévisé des années 1990, l'hôte Monty Hall propose à un joueur de choisir une porte parmi trois possibles. Derrière une de ces portes se trouve une voiture et derrière les autres se trouve une chèvre. Après la sélection du joueur, Monty Hall ouvre une porte qui dévoile une chèvre et offre au joueur la possibilité de changer son choix initial de porte. Quelle stratégie choisir : changer de porte ou conserver son choix?
- La question de Bertrand (mathématicien français, m. 1900) : on considère un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. Tout triangle équilatéral inscrit dans ce cercle a pour côté $\sqrt{3}$. Soit une corde de ce cercle choisit au hasard. Quelle est la probabilité que cette corde soit plus longue que le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle, soit $\sqrt{3}$?

3 Quelques applications

- Monte Carlo : calcul d'aires et de volumes sans formule!
- Intelligence artificielle : l'apprentissage machine par réseaux profonds.
- Des sujets plus abstraits (par ex. théorie des nombres), des sujets plus concrets (par ex. droit/justice, sports), la probabilité que le formalisme et le calcul des probabilités n'aient pas participé au développement d'une science est proche de zéro! Les applications les plus importantes sont en statistique et en physique (quantique).